

# ۱۶. معادلات و نامعادلات

مجموعه ریاضی نظری  
@tmrnazari@mrnazar

« ۷ - معادلات و نامعادلات »

۱- نقطه‌ای  $A(7, 2)$  رأس یک مستطیل المثلث است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات  $3y - 2x = 11$  و  $2y + 3x = 8$  می‌باشند. مختصات وسط قعر آن کدام است؟ (تقریب ۹۰)

$$\begin{cases} 3y + 2x = 8 \\ 2y - 3x = 11 \end{cases} \rightarrow 17y = 28 \quad y = \frac{28}{17}$$

$$2y - 3x = 11 \rightarrow 2 \cdot \frac{28}{17} - 3x = 11 \rightarrow 17x = -\frac{28}{17} - 11 \rightarrow x = -\frac{205}{17}$$

رأس مقابل  $A(7, 2)$  رأس  $B(-1, 2)$  است. پس نقطه  $M = \frac{1}{2}(A+B) = (3, 2)$  وسط قطر خواهد بود.

۲- مجموع ریشه‌های معادله  $(x^2 + m)^2 - 8(x^2 + m) + 72 = 0$  کدام است؟ (تقریب ۹۰)

$$x^2 + m = t \quad \begin{matrix} 2 & 13 \\ -2 & 12 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

با فرض اینکه  $x^2 + m = t$  باشد، معادله به صورت  $t^2 - 8t + 72 = 0$  خواهد بود.

$$t^2 - 8t + 72 = 0 \rightarrow (t^2 + t - 11)(t^2 + t - 7) = 0 \rightarrow \begin{cases} t^2 + t - 11 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} S = \alpha + \beta = -1 \\ t^2 + t - 7 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} S = \alpha + \beta = -1 \end{cases}$$

$$\alpha + \beta + \alpha' + \beta' = -1$$

۳- معبره جواب نامعادله  $\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1$  به صورت کدام بازه است؟ (تقریب ۹۲)

$$(1) \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \cup \left( \frac{1}{2}, -3 \right) \quad (2) \left( -3, \frac{1}{2} \right) \quad (3) \left( -3, \frac{1}{2} \right) \cup \left( \frac{1}{2}, 3 \right) \quad (4) \left( \frac{1}{2}, 3 \right) \cup \left( -3, \frac{1}{2} \right)$$

$$\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1 \rightarrow \left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1 \xrightarrow{x \neq -\frac{1}{2}} |x-2| > |2x+1| \xrightarrow{\text{برون‌سازیم}} x^2 - 4x + 4 > 4x^2 + 4x + 1$$

$$\rightarrow 3x^2 + 8x - 3 < 0 \quad \begin{matrix} -3 & 1 \\ + & - \\ 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow -3 < x < \frac{1}{3}, \quad x \neq -\frac{1}{2} \rightarrow x \in \left( -3, -\frac{1}{2} \right) \cup \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)$$

۴- برای کدام مقادیر  $m$ ، مجموع ریشه‌های معادله  $m^2x^2 - (m+3)x + 5 = 0$  برابر  $\frac{1}{m}$  می‌باشد؟ (تقریب ۹۳)

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -\frac{1}{0} \\ \frac{1}{0} \\ \frac{1}{0} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\frac{m^2x^2}{a} - \frac{(m+3)x}{b} + \frac{5}{c} = 0 \rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{m+3}{m} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{m} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 = 7 \quad x_1^2 + x_2^2 = 5^2 - 2P \rightarrow \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{0}{m}\right) = 7 \rightarrow$$

$$\frac{m^2 + 2m + 1}{m^2} - \frac{10}{m} = 7 \rightarrow \frac{m^2 + 2m + 1 - 10m}{m^2} = 7 \rightarrow m^2 - 8m + 1 = 7m^2 \rightarrow$$

$$8m^2 + 8m - 1 = 0 \quad \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

حال برای این معادله درجه دوم برای \$m\$، نتایج مثبت به دست می آید.

$$\begin{cases} m = 1: x^2 - 8x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4 = -4 < 0 \text{ قرین} \\ m = -\frac{1}{8}: -\frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{8}x + 1 = 0 \rightarrow \Delta > 0 \text{ قرین} \end{cases}$$

۵- برای کدام مقدار \$m\$ دستگاه معادلات دارای جواب است؟ (تقریب ۹۲)

$$\begin{cases} mx + y = m - 1 \\ 3x + (m-2)y = 2 - 2m \end{cases}$$

۱)  $-2$  ۲)  $-1$  ۳)  $1$  ۴) هیچ مقدار \$m\$

$$\frac{m}{3} = \frac{1}{m-2} = \frac{m-1}{2-2m} \rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \quad \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$$

برای \$m = -1\$ دو نسبت اول برابر \$\frac{1}{3}\$ بوده و نسبت سوم نیز برابر \$\frac{1}{3}\$ خواهد بود. این قابل قبول است. ولی برای \$m = 3\$ نسبت سوم برابر دو نسبت اول دوم نشده و دستگاه جواب نخواهد داشت.

۶- ریشه های کدام معادله از معادله های دیگر حاصل می شود؟ (تقریب ۹۲)

$$1) \quad x^2 - 3x + 1 = 0 \quad 2) \quad x^2 + 3x + 1 = 0 \quad 3) \quad x^2 - 5x + 2 = 0 \quad 4) \quad x^2 + 5x + 2 = 0$$

آرریشه های معادله های صورت سوال را \$\alpha\$ و \$\beta\$ ریشه های معادله مورد نظر این \$\frac{1}{\alpha} - 1\$ و \$\frac{1}{\beta} - 1\$ باشد.

$$S = \frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{1}{\beta} - 1 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\frac{3}{-1}}{-1} - 2 = -3 - 2 = -5$$

$$P = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1 - \alpha - \beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1 - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + 1$$

$$\frac{1 - \frac{3}{-1}}{-1} + 1 = \frac{-1}{-1} + 1 = 2 \rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

۷- مجموعه جواب معادله \$| \frac{2-x}{2x-3} | > 1\$ به صورت کدام بازه ها است؟ (تقریب ۹۵)

۱)  $(\frac{3}{2}, 1)$  ۲)  $(\frac{5}{3}, 1)$  ۳)  $(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$  ۴)  $(\frac{5}{3}, 2)$

$\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1 \rightarrow$  طرزین لادر  $|2x-3|$  صغیرترین  $x \neq 2 \rightarrow |2-x| > |2x-3|$  بجای ۲  
 $2+x^2-2x > 2x^2+9-12x \rightarrow 3x^2-10x+7 < 0 \rightarrow 3+(-1)+0=0 \rightarrow x=1, \frac{7}{3}$   
 $1 < x < \frac{7}{3}$  ,  $x \neq \frac{3}{2}$

۸- به ازای کدام مقدار  $m$  ریشه های معادله  $m^2x^2+3x+m^2=2$  معکوس یکدیگرند؟ (توسعه خارج ۹۰)

$2$  (ع)                       $1$  (س)                       $-1$  (ص)                       $-2$  (د)

فرض کنیم  $x_1$  و  $x_2$  ریشه های معادله درجه دوم مورد سوال باشند. آنگاه طبق فرض:  $x_1 x_2 = 1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2}$   
 از طرف دیگر داریم که اگر معادله  $ax^2+bx+c=0$  دارای ریشه های  $x_1$  و  $x_2$  باشد آنگاه:  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

$m^2x^2+3x+(m^2-2)=0 \xrightarrow{x_1 x_2=1} \frac{m^2-2}{m^2}=1$   
 با فرض  $m \neq 0$  طرزین معادله ای که برادر  $m$  ضرب می شود:  $m^2-2=m \rightarrow m^2-m-2=0 \rightarrow (m-2)(m+1)=0$   
 $m=2 \rightarrow 2x^2+3x+2=0$   
 $m=-1$

$\Delta < 0 \rightarrow$  حقیقی ریشه ندارد

۹- معادله  $|x-2| < x^2-2x$  به صورت کدام بازه حالت؟ (توسعه خارج ۹۲)

(۱)  $(-1, 1)$                       (۲)  $(2, -1)$                       (۳)  $(0, 2)$                       (۴)  $(2, 1)$

بجای اصل بدون علامت گذاری کنیم:

$x=0$  و  $x=1$  در معادله صدق می کند که فقط هر دو ریشه معادله  $x^2-2x=0$  است.

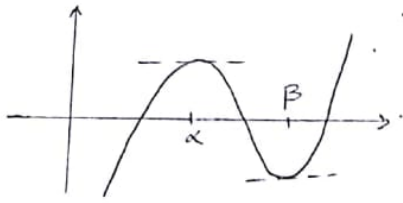
۱۰- از دو معادله  $2^x+2^x=72$  و  $\log(x+1)+\log(2y+x^2)=2$  معادله  $10^x$  معلوم است؟ (توسعه خارج ۹۲)

(۱)  $2$                       (۲)  $72$                       (۳)  $8$                       (۴)  $9$

$2^{2x} + 2^x = 72 \xrightarrow{2^x=A} A^2 + A - 72 = 0 \rightarrow (A-8)(A+9) = 0 \rightarrow A=8=2^x \rightarrow x=1$   
 $A=9=2^x \rightarrow x=\log_2 9$   
 $x=1 \rightarrow \log 2 + \log(2y+1) = 2 \rightarrow \log(2y+1) = 2$   
 $10^2 = 2y+1 \rightarrow 4=2y$

۱۱- به ازای کدام مقادیر  $a$ ، معادله  $\varepsilon = \varepsilon + (a-1)x^2 + (a-1)x^3$  دارای ۳ ریشه حقیقی متمایز مثبت است؟ (توجه خارج ۹۵)

۱)  $a < -\varepsilon$       ۲)  $a > -\varepsilon$       ۳)  $a < \varepsilon$       ۴)  $a > \varepsilon$



پول  $f$  دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است نمودار آن به شکل زیر است:

در این شکل  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های مشتق تابع  $f$  اند. در صیقلیت  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله

درجه دوم  $f'(x) = 2x^2 + 1(a-1)x + \varepsilon - a$  هستند این معادله باید دارای دو ریشه حقیقی متمایز مثبت باشد.

پس این در این معادله باید  $\Delta > 0$ ، جمع ضرب ریشه‌ها نیز مثبت باشد.

$$\Delta > 0 \rightarrow \varepsilon(a-1)^2 - 4 \times 1^2 (\varepsilon - a) > 0 \rightarrow a^2 - a - 11 > 0$$

ریشه‌های معادله  $a^2 - a - 11 = 0$  اعداد  $-\frac{1}{2}, 3, 8$  اند و جدول تعیین علامت نامعادله  $a^2 - a - 11 > 0$  به صورت زیر است:

$a$	$-\frac{1}{2}$	$3, 8$	
$a^2 - a - 11$	+	-	+
	تق	تق	تق

جمع ریشه‌های معادله  $f'(x) = 2x^2 + 1(a-1)x + \varepsilon - a$  نیز باید مثبت باشد یعنی  $\frac{-(a-1)}{2} > 0$  نتیجه دیگر  $a < 1$  از طرف دیگر ضرب ریشه‌های معادله نیز باید مثبت باشد پس  $\frac{\varepsilon - a}{2} > 0$  یا معادل آن  $a < \varepsilon$  است. اشتراک این جواب‌ها در شکل زیر نشان داده شده است.



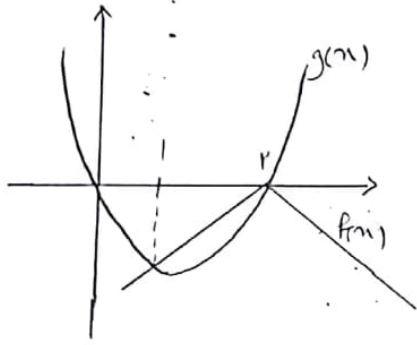
بنابراین مجموعه  $a$  از  $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (-\infty, -\varepsilon) \cup (-\varepsilon, -\frac{1}{2})$  است و چون  $\varepsilon > -\frac{1}{2}$  از به ازای  $a < -\varepsilon$  نیز شرایط برقرار است.

۱۲- مجموعه جواب نامعادله  $|x^2 + 1| > |x - 2| - 2x + 1$  به صورت کدام بازه است؟ (توجه خارج ۹۵)

۱)  $(-2, 1)$       ۲)  $(1, 2)$       ۳)  $(-1, 2)$       ۴)  $(1, 2)$

$x^2 + 1$  مثبت است پس، بتوانیم طرفه‌های آن را بر داریم.

$$2x + 1 - |x - 2| > x^2 + 1 \rightarrow \underbrace{-|x - 2|}_{f(x)} > \underbrace{x^2 - 2x}_{g(x)}$$



محمد رضا نظری  
@tmrnazari@mrnnazari

« ۱۷ - معادلات و نامعادلات »

۱- به ازای کدام مقدار  $m$  خط به معادله  $y = 2x - 5$  برمیخیزد به معادله  $y = (m+3)x^2 + mx$  موازی است؟ (ریاضی ۹۰)

- ۱) ۱۸ و ۲ -      ۲) ۲۲ و ۲ -      ۳) ۲۲ و ۲ -      ۴) ۱۱ و ۲ -

$$(m+3)x^2 + mx = 2x - 5 \rightarrow (m+3)x^2 + (m-2)x + 5 = 0 \xrightarrow{\text{شرط برابری موازی}} (m-2)^2 - 5(m+3) = 0$$

$$m^2 - 5m + 5 - 17m - 15 = 0 \rightarrow m^2 - 22m - 10 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (m-22)(m+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} m=22 \\ m=-2 \end{cases}$$

۲- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 + 3(5x+3) = 2$  باشند به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه  $\alpha$  جواب معادله  $x^2 - kx + 25 = 0$  است؟ (ریاضی ۹۰)

- ۱) ۲۷      ۲) ۲۹      ۳) ۲۸      ۴) ۳۱

در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $a+c=b$  و  $a+c=0$  باشد، ریشه‌ها از ریشه‌ها  $-\frac{c}{a}$  و  $-\frac{c}{a}$  است. هم چنین اگر  $a+b+c=0$  باشد، ریشه‌ها از ریشه‌ها  $-\frac{c}{a}$  است. پس ریشه‌های معادله  $x^2 - kx + 25 = 0$  و ریشه‌های معادله  $x^2 - 29x + 25 = 0$  برابرند. لذا باید مجموع ضرایب معادله دوم صفر باشد:

$$25 + (-k) + 25 = 0 \rightarrow k = 29$$

۳- اگر عبارت  $x^2 + (a-1)x + 1$  به ازای هر مقدار  $x$  منفی باشد،  $a$  به کدام مجموعه تعلق دارد؟ (ریاضی ۹۱)

۱)  $\{a: 1 < a < 5\}$       ۲)  $\{a: a < 1\}$       ۳)  $\emptyset$       ۴)  $R$

عبارت درجه دوم  $ax^2 + bx + c$  همواره منفی است هرگاه  $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$  بنابراین برای این عبارت درجه دوم  $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$  همواره منفی باشد باید:

$$\begin{cases} (1) \quad a < 1 \rightarrow (a-1) < 0 \rightarrow \text{ضریب } x^2 < 0 \\ (2) \quad (a-1)(a-1-4) < 0 \rightarrow (a-1)(a-5) < 0 \rightarrow 1 < a < 5 \end{cases}$$

از آنجا که  $a < 1$  و  $1 < a < 5$  نمی‌تواند همواره منفی باشد.

۴- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$  نمودار تابع  $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$  از ناحیه اول محورها منحرف نمی‌شود؟  
(رایضه ۹۲)

۱۷  $a \leq 2$     ۱۲  $0 < a \leq 2$     ۱۳  $2 < a < 3$     ۱۴  $0 < a < 3$

(۱)  $a < 3 \rightarrow a-3 < 0 \rightarrow$  (منفی  $x^2$ )  $>$   
(۲)  $a > 2, a < -2 \rightarrow (a-2)(a+2) > 0 \rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0$

$P = \alpha\beta > 0 \rightarrow P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{a-3} > 0$  ;  $S = \alpha + \beta < 0 \rightarrow S = -\frac{b}{a} = \frac{-a}{a-3} < 0 \rightarrow$

(۳)  $a < 0 \rightarrow -a > 0$

اشتراک (۱) و (۳)  $a < -2$  (۳) برابر  $a < -2$  می‌شود. حال فرض می‌کنیم فاکتور  $a$  را در معادله  $a^2 + 4a - 12 > 0$  قرار دهیم:

(۴)  $-2 < a < 2 \rightarrow (a-2)(a+2) < 0 \rightarrow a^2 + 4a - 12 < 0$

اشتراک (۱) و (۴) برابر  $-2 < a < 2$  است و جوابی دوباره برابر  $a < 2$  است.

۵- اگر  $\alpha, \beta$  ریشه‌ها معادله  $x^2 - 3x - 4 = 0$  باشند به کمک جواب‌ها کدام معادله به صورت  $\left\{ 1 + \frac{1}{\alpha}, 1 + \frac{1}{\beta} \right\}$  است؟ (رایضه ۹۲)

(۱)  $x^2 - 5x + 1 = 0$     (۲)  $x^2 - 3x + 1 = 0$     (۳)  $x^2 - 5x - 1 = 0$     (۴)  $x^2 - 3x - 1 = 0$

$\alpha + \beta = \frac{3}{1}, \alpha\beta = -4$  ;  $S' = \alpha' + \beta' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{5}{-4} + 2 = \frac{3}{4}$  ,  $P' = \alpha'\beta' =$

$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = -\frac{1}{4}$

$x^2 - S'x + P' = 0 \rightarrow x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$

۶- مجموعه جوابی نامعادله  $2n - 5 < |n-2|$  کدام است؟ (رایضه ۹۲)

(۱)  $(1, 0)$     (۲)  $(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$     (۳)  $(1, 0) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$     (۴)  $(1, 0) \cup (1, 2)$



$$x > 0 \rightarrow x^2 - 2x < 2x - 5 \rightarrow x^2 - 4x + 5 < 0 \rightarrow x \in (1, 0)$$

$$x < 0 \rightarrow -x^2 + 2x < 2x - 5 \rightarrow x^2 - 2x - 5 > 0 \xrightarrow{x < 0} x \in (-\infty, 1 - \sqrt{6})$$

۷- به ازای کدام مقدار  $a$  معادله‌های دو تابع بالا یک‌بارهای هستند؟ (رایانه ۹۱)

۱)  $-2$       ۲)  $3$       ۳)  $\sqrt{3}$       ۴)  $-1$

برای اینکه دو معادله یک‌بار باشند باید معادله‌های آن‌ها هم‌بندی مکرر باشد:

$$\begin{cases} g(x) = ax^2 + \varepsilon x \\ f(x) = x^2 + 1 \end{cases} \rightarrow f(x) = g(x) \rightarrow ax^2 + \varepsilon x = x^2 + 1 \rightarrow (a-1)x^2 + \varepsilon x - 1 = 0$$

چون جواب درجه دوم حاصل شد برای داشتن هم‌بندی مکرر باید  $\Delta = 0$  باشد:

$$\Delta = 0 \rightarrow 12 - \varepsilon(a-1)(-1) = 0 \rightarrow 12 + \varepsilon a - \varepsilon = 0 \rightarrow 12 + \varepsilon a = 0 \rightarrow a = -3$$

۸- به ازای معادله  $f(x) = x^2 + ax - 1$  از چه ضرایب  $a$  ضرایب  $f(x) = 0$  بر  $x+2$  بخش پذیر است. کوچک‌ترین هم‌بندی

معادله  $f(x) = 0$  کدام است؟ (رایانه ۹۲)

۱)  $1 - \sqrt{3}$       ۲)  $1 - \sqrt{5}$       ۳)  $-1 - \sqrt{3}$       ۴)  $-1 - \sqrt{5}$

$$f(x) = x^2 + ax - 1 \rightarrow f(-2) = 0 \rightarrow 4 - 2a - 1 = 0 \rightarrow 3 - 2a = 0 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

از  $x$  برابر  $x+2$  فاکتور گرفته و سپس آن را بر  $x+2$  تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 + ax - 1 = x(x^2 + \varepsilon x^2 - 1) = x(x+2)(x^2 + 2x - \varepsilon)$$

که حاصل معادله درجه دوم  $(x^2 + 2x - \varepsilon)$  از ریشه‌ها  $1 - \sqrt{5}$  و  $1 + \sqrt{5}$  می‌باشد.

۹- حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $x^2 + \varepsilon x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$  معادله  $f(x) = 0$  کدام است؟ (رایانه ۹۳)

۱)  $-2$       ۲)  $3$       ۳)  $11\sqrt{3}$       ۴)  $4$

$$x^2 + \varepsilon x = a \rightarrow a + 3 = \sqrt{a+5} \rightarrow a^2 + 2a + 9 = a + 5 \rightarrow a^2 + a + 4 = 0$$

$a = -1$ ,  $a = -2$

$$x^2 + \varepsilon x = a \rightarrow x^2 + \varepsilon x + 1 = 0 \rightarrow \varepsilon = 1$$

۱۰- اگر مجموع جوابات معادله  $\sqrt{3x+2} > 2|x-1| - x$  از (a و b) باشد. طول وسط این بازه کدام است؟ (رایضه ۹۰)

$$2 \quad 15 \quad \frac{7}{2} \quad 13 \quad 1 \quad \frac{5}{2} \quad 11$$

$$x > 0 : \sqrt{3x+2} > x-2 \rightarrow 3x+2 > x^2-2x+4 \rightarrow 0 > x^2-5x+2 \rightarrow 5 > x > 1 \quad \text{①}$$

$$x \leq 0 : \sqrt{3x+2} > -3x+2 \rightarrow 3x+2 > 9x^2-12x+4 \rightarrow 0 > 9x^2-18x \rightarrow$$

$$1 \geq x > 0 \quad \text{②}$$

$$\text{①, ②} \rightarrow 5 > x > 0 \rightarrow \text{وسط بازه: } \frac{5}{2}$$

رایضه خارج ۹۰

۱۱- به ازای کدام مقادیر  $m$  عبارت  $(m-1)x^2 + 2mx + 2m + 1$  هر دو معادله  $kx^2 + 2x + 1 = 0$  و  $x^2 + 2x + 1 = 0$  را مشترک است؟

$$1 < m < 2, 0 \quad 1 < m < 2 \quad m > 2, 0 \quad m < -2$$

$$\begin{cases} \Delta < 0 \rightarrow (2)^2 - 4(m-1)(m-1) < 0 \\ a > 0 \rightarrow m-1 > 0 \rightarrow m > 1 \\ \Delta m^2 - 2m - 2 > 0 \\ m > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 1 > 0 \rightarrow (m+2)(2m-1) > 0 \\ m < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m < -2 \cup m > \frac{1}{2} \\ m > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m > \frac{5}{2} \rightarrow m > 2, 5$$

۱۲- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $x^2 - 2x + 1 = 0$  باشند به ازای کدام مقادیر  $k$  معادله  $kx^2 + 2x + 1 = 0$  را معادله ای مشترک است؟ (رایضه خارج ۹۰)

$$1 < k < 2 \quad 1 < k < 2 \quad k > 2, 0 \quad 0 < k < 1$$

$$9 \quad 15 \quad 2 \quad 11$$

$$S = \frac{-b}{a} \rightarrow \alpha + \beta = \frac{-2}{1} = -2 \quad \rightarrow (\alpha\beta)(\alpha + \beta) = \frac{-k}{1} \quad \text{①}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha\beta = 1 \end{cases}$$

$$\text{①} \rightarrow \frac{1}{1}(-2) = \frac{-k}{1} \rightarrow k = 2$$

۱۳- در معادله  $x^2 - 8x + m = 0$  یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بزرگتر است.  $m$  کدام است؟  
 ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ریاضی خارج ۹۹

با تغییر معادله به صورت حاصل ضرب فاکتورهای مربع شونده آن (یعنی:  $(x-a)$  و  $(x-\frac{a}{r}-5)$ ) داریم:

$$x^2 - 8x + m = (x-a)(x-\frac{a}{r}-5) = x^2 + (-a - \frac{a}{r} - 5)x + (\frac{a^2}{r} + 5a) \rightarrow$$

$$\begin{cases} -8 = -a - \frac{a}{r} - 5 \rightarrow a = 3 \\ m = \frac{a^2}{r} + 5a \end{cases}$$

با قرار دادن مقدار  $a$  در فرمول  $m$  برابر ۱۲ واحد می‌شود.

۱۴- کوچکترین ریشه ی مثبت معادله  $x^3 - 12x + 1 = 0$  در کدام بازه است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱ (۱)  $[\frac{1}{11}, \frac{1}{12}]$

۲ (۲)  $[\frac{1}{13}, \frac{1}{11}]$

۳ (۳)  $[\frac{1}{13}, \frac{1}{12}]$

۴ (۴)  $[\frac{1}{11}, \frac{1}{10}]$

$$f(x) = x^3 - 12x + 1 = x^3 + 1 - 12x$$

$$f(\frac{1}{10}) = (\frac{1}{10})^3 + 1 - \frac{12}{10} < 0$$

$$f(\frac{1}{11}) = (\frac{1}{11})^3 + 1 - \frac{12}{11} = (\frac{1}{11})^3 - \frac{1}{11} < 0$$

$$f(\frac{1}{12}) = (\frac{1}{12})^3 + 1 - 1 = (\frac{1}{12})^3 > 0$$

$$f(\frac{1}{13}) = (\frac{1}{13})^3 + 1 - \frac{12}{13} > 0$$

$$f(\frac{2}{13}) = (\frac{2}{13})^3 + 1 - \frac{24}{13} = (\frac{2}{13})^3 - \frac{1}{13} < 0$$

پس  $f(\frac{1}{13}) \times f(\frac{2}{13}) < 0$  یعنی معادله  $f(x) = x^3 - 12x + 1 = 0$  درون بازه  $[\frac{1}{13}, \frac{2}{13}]$  دارای ریشه است.

۱۵- برای کدام مقادیر دایره  $a$  معادله  $f(x) = ax^2 + (a+1)x - 1$  محور  $x$  را دو نقطه

بر خط  $x$  های مثبت قطع می‌کند؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱ (۱)  $a < -1$

۲ (۲)  $a < -2$

۳ (۳)  $a > -1$

۴ (۴)  $-2 < a < 0$

تابع در صورتی محور  $x$  را در دو نقطه  $x$  های مثبت قطع می‌کند که شرط زیر برقرار باشد:

$$1) \Delta = (a+3)^2 - 4(a)(-1) = a^2 + 10a + 9 > 0 \rightarrow (a+9)(a+1) > 0 \rightarrow (a < -9) \cup (a > -1) \quad \therefore$$

$$2) \frac{-(a+3)}{a} < 0 \rightarrow (a < -3) \cup (a > 0) \quad (II)$$

$$3) \frac{-1}{a} > 0 \rightarrow a < 0 \quad (III)$$

استنتاج جواب ها  $a < -9$

۱۶- معین جواب نامعادلی  $|x^2 - 2x| < x$  کدام بازه است؟ (رایضه خارج ۹۲)

(۱) ۴

(۲) ۳

(۳) ۲

(۴) ۱

$$\begin{cases} (x < 0) \cup (x > 2): x^2 - 2x < x \rightarrow x^2 - 3x < 0 \rightarrow 0 < x < 3 \xrightarrow{\text{استنتاج I}} 2 < x < 3 \quad (1) \\ 0 \leq x \leq 2: -x^2 + 2x < x \rightarrow x^2 - x > 0 \rightarrow (x < 0) \cup (x > 1) \xrightarrow{\text{استنتاج II}} 1 < x \leq 2 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \cup (2) \rightarrow 1 < x < 3$$

۱۷- به ازای کدام معیبه‌ی مقادیر  $m$  معنی به معادلی  $x^2 + 3x + 1 - m = 0$  معرره‌ها دارد؟  
(دو طرف مساوی معادلات جمع می‌کنند) (رایضه خارج ۹۵)

$$1) m > 1 \quad 2) m < -2 \quad 3) فقط -2 < m < 1 \quad 4) فقط 1 > m$$

$$2) -2 < m < 1$$

$$1) m > 1 \quad 2) m < -2$$

۱۸- اگر معین جواب نامعادلی  $|x+1| < |x^2 - 2|$  با زنی  $(a, b)$  باشد، فصل وسط این بازه کدام است؟

(رایضه خارج ۹۵)

۱) ۲

۲) ۱

۳) ۱

۴) ۵